Лекція 3. Перетворення Лапласа. Загальні відомості

Короткий зміст

Короткий зміст

У цій лекції:

— запроваджено поняття перетворення Лапласа;
— означено оригінал, зображення функції;
— з’ясовано область існування зображення;
— знайдені зображення деяких оригіналів.

3.1. Оригінал та зображення

3.1.1. Означення оригіналу

Означення 3.1. *Функцією-оригіналом* (⇔ *оригіналом*) називають довільну функцію $f(t)$ (можливо комплекснозначну функцію $f(t) = u(t) + iv(t)$) дійсної змінної t, що задовольняє наступні умови:
1) $f(t)$— кусково - неперервна, інтегровна на довільному скінченному проміжку осі Ot;
2) $f(t) \equiv 0, \quad \forall t < 0$;
3) існують сталі $M > 0$ та s, що

$$\left|f(t)\right| \le Me^{st}, \quad \forall t \ge 0, \qquad (3.1)$$

тобто функція $\left|f(t)\right|$ зростає при $t \to +\infty$ не швидше показникової функції.

Очевидно, що якщо нерівність (3.1) виконується для деякого $s = s_1$, то вона буде виконуватися і для всіх $s > s_1$. Точну нижню межу s_0 всіх чисел s, для яких виконується нерівність (3.1), називають *показником росту функції* $f(t)$.

Найпростішим прикладом оригіналу є одинична *функція Хевісайда* (рис. 3.1):

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

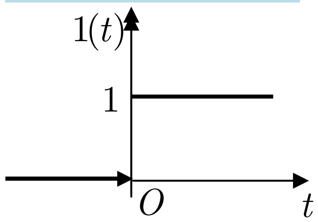

Рис. 3.1

Всі три умови означення 3.1 для функції Хевісайда виконуються:
1) функція $1(t)$ інтегровна на довільному скінченному проміжку $t_1 \le t \le t_2$;
2) $1(t) \equiv 0, \quad \forall t < 0$;
3) $\left|1(t)\right| = 1$, тому $\left|1(t)\right| \le 1 \cdot e^{st} = e^{st}$ $(M = 1, \quad s \ge 0, \quad s_0 = 0)$.

Отже, функція Хевісайда є оригіналом з показником росту $s_0 = 0$.

Зауваження 3.1. Якщо деяка функція $\varphi(t)$ задовольняє умови 1) та 3) означення 3.1, але не задовольняє умову 2), то функція $f(t) = \varphi(t) \cdot 1(t)$ вже є оригіналом.

Для спрощення запису, множник $1(t)$ не пишуть, тобто запис $\sin t$ означає, що задана наступна функція

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, \ t \geq 0, \\ 0, \quad\ \ t < 0. \end{cases}$$

Приклад 3.1. Покажемо, що функція $e^{\alpha t}$, де $\alpha = a + ib$ — довільне комплексне число, є оригіналом. Знайдемо показник росту функції.

❍ Функція $e^{\alpha t} \cdot 1(t)$, $\alpha = a + ib$, задовольняє всі умови означення 3.1: неперервна на всій осі t;

$$\left|e^{\alpha t}\right| = \left|e^{(a+ib)t}\right| = e^{at}\left|e^{ibt}\right| \leq Me^{at},$$

де $M \geq 1$, $s_0 = \operatorname{Re}\alpha = a$.

Тому функція $e^{\alpha t}$ є оригіналом з показником росту $s_0 = \operatorname{Re}\alpha = a$. ●

3.1.2. Означення зображення

Нехай $f(t)$ — оригінал. Розглянемо інтегральне перетворення, за яким оригіналу $f(t)$ відповідає функція $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Таке перетворення називають *перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, а інтеграл в правій частині, який береться вздовж додатної півосі Ot, називають *інтегралом Лапласа*.

Означення 3.2. Функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається формулою

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,} \tag{3.2}$$

називають *зображенням* функції $f(t)$.

Той факт, що $F(p)$ є зображенням $f(t)$ символічно записують так:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \tag{3.3}$$

і називають *операторною рівністю*. Застосовують ще й інші позначення, наприклад,

$$F(p) = L\big(f(t)\big); \quad f(t) \xrightarrow{L} F(p).$$

3.2. Теореми про існування зображення

Теорема 3.1 ***(про область існування та аналітичності зображення).*** Для довільного оригіналу $f(t)$ його зображення $F(p)$ визначено в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$, де s_0 — показник росту $f(t)$, та є аналітичною функцією в цій півплощині (рис. 3.2) .

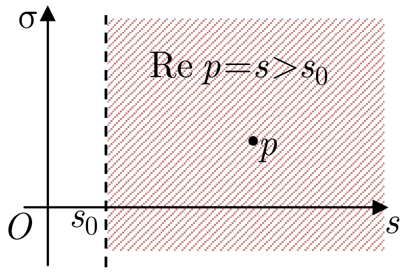

Рис. 3.2

► Нехай $p = s + i\sigma$ — довільна точка півплощини $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (див. рис. 3.2).

Враховуючи, що $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, одержимо:

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty \left|f(t)e^{-pt}\right|dt \le M\int_0^\infty e^{s_0 t}\cdot\left|e^{-(s+i\sigma)t}\right|dt =$$

$$= M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0},$$

оскільки

$$s - s_0 > 0;\ \left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-st}\cdot e^{-i\sigma t}\right| = e^{-st}\cdot\left|e^{-i\sigma t}\right| = e^{-st}\cdot 1 = e^{-st}.$$

Отже,

$$|F(p)| \le \frac{M}{s-s_0}. \tag{3.4}$$

З нерівності (3.4) випливає за ознакою порівняння абсолютна збіжність інтегралу (3.2), тобто зображення $F(p)$ існує та однозначне в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Доведемо, що в цій області зображення $F(p)$ є аналітичною функцією. Диференціюючи вираз (3.2) формально під знаком інтеграла за змінною p, одержимо

$$F'(p) = -\int_0^\infty t\cdot f(t)e^{-pt}dt, \tag{3.5}$$

звідки

$$\left|F'(p)\right| \le M\int_0^\infty t\cdot e^{-(s-s_0)t}dt = M\left(t\cdot\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)}\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(s-s_0)t}}{s-s_0}dt \right) =$$
$$= \frac{M}{(s-s_0)^2},$$

оскільки

$$\lim_{t\to\infty} t\cdot\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} = 0,\ s > s_0.$$

Таким чином, повторюючи попередні міркування, отримаємо, що похідна $F'(p)$ існує всюди в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, отже, функція $F(p)$ є аналітичною в цій області. ◀

Зауваження 3.2. З теореми 3.1 випливає, що зображення $F(p)$ є аналітичною функцією в області $\operatorname{Re} p > s_0$ (s_0 — показник росту оригіналу $f(t)$). Якщо функція $F(p)$ має особливі точки, то вони містяться або в області $\operatorname{Re} p < s_0$, або на самій прямій $\operatorname{Re} p = s_0$.

Так, функція $F(p) = \operatorname{tg} p$ не є зображенням, оскільки вона має нескінченну множину полюсів $p_n = \pi\dfrac{2n-1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, які розподілені вздовж всієї осі s.

Наслідок. ***(необхідна умова існування зображення).*** Якщо $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ і точка p прямує до нескінченності так, що $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p) = 0. \tag{3.6}$$

▶ Маємо

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt\right| \le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0},$$

де s_0 — показник росту функції $f(t)$. Тому, коли $s\to\infty$, $F(p)\to 0$ ◀

Зауваження 3.3. Якщо функція $F(p)$ не задовольняє умову (3.6), то вона не є зображенням, наприклад, $F(p) = p^2$ не є зображенням ($\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} p^2 \ne 0$).

Приклад 3.2. Знайдемо зображення одиничної функції Хевісайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

❍ Відповідно з формулою (3.2) маємо

$$F(p)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{p}$$

$(\operatorname{Re} p>0, s_0=0)$, тобто

$$1(t) \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p}. \quad \bullet \tag{3.7}$$

Зауваження 3.4. Зображення (3.7) отримали за умови $\operatorname{Re} p=s>0$. При $s\le 0$ інтеграл Лапласа не існує. Але функція $\frac{1}{p}$ є аналітичною на всій площині комплексної змінної p, за винятком точки $p=0$, в якій зображення має простий полюс. Така особливість має місце і для багатьох інших зображень, що, однак, не суперечить теоремі 3.1 (див. Зауваження 3.2). Надалі для нас, як правило, буде важливим аналітичний вираз зображення, а не область, в якій воно задається інтегралом (3.2).

Приклад 3.3. Знайдемо зображення функції $f(t)=e^{\alpha t}$, де α — довільне комплексне число.

❍ Дана функція є оригіналом (див. Приклад 3.1). На підставі рівностей (3.3) та (3.2), отримаємо

$$e^{\alpha t} \mathrel{\dot{=}} \int_0^\infty e^{\alpha t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt=\frac{1}{p-\alpha},\ \operatorname{Re}(p-\alpha)>0.$$

Отже, в області $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\alpha$

$$e^{\alpha t} \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p-\alpha}. \quad \bullet \tag{3.8}$$

Наприклад, $e^{2t} \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p-2}$, $e^{-5t} \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p+5}$, $e^{(1-i)t} \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p-1+i}$.

Приклад 3.4. Знайдемо (за означенням) зображення оригіналу $f(t)=t$.

$$❍\ t \mathrel{\dot{=}} \int_0^\infty t\cdot e^{-pt}dt=-\frac{te^{-pt}}{p}\bigg|_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2},\ \operatorname{Re} p>0,$$

оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-pt}=0$.

Отже,

$$t \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{p^2}. \quad \bullet$$

Приклад 3.5. Знайдемо (за означенням) зображення функції $f(t) = t \cdot 1(t-1)$.

❍ За означенням

$$f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} t \cdot 1\big(t-1\big) \cdot e^{-pt} dt.$$

Оскільки

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

тому

$$1(t-1) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

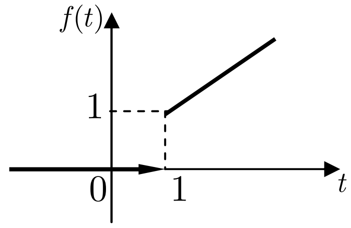

Рис. 3.3

Отже,

$$f(t) \risingdotseq \int\limits_1^{\infty} t \cdot e^{-pt} dt = t \cdot \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_1^{\infty} + \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-pt}}{p} dt =$$

$$= \frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt}\Bigg|_1^{\infty} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{-p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \; ●$$

Приклад 3.6. Знайдемо зображення функції, яка задана графічно:

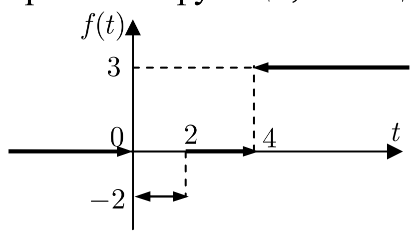

Рис. 3.4

❍ Запишемо аналітичний вираз заданої функції $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -2, & 0 < t < 2; \\ 0, & 2 \leq t < 4; \\ 3, & t > 4. \end{cases}$$

За формулою (3.2):

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{2}-2e^{-pt}dt+\int_4^{\infty}3e^{-pt}dt=\frac{2}{p}e^{-pt}\Big|_0^2-$$

$$-\frac{3}{p}e^{-pt}\Big|_4^{\infty}=\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{2}{p}+\frac{3}{p}e^{-4p}=\frac{2e^{-2p}-2+3e^{-4p}}{p},\quad \operatorname{Re} p>0. \bullet$$

Приклад 3.7. Знайдемо зображення

$$t^{\alpha},\quad \alpha>-1.$$

❍ При $\alpha>-1$ функція $f(t)=t^{\alpha}$ є оригіналом ($s_0=0$). Тому

$$t^{\alpha}\ \dot{=}\ \int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot t^{\alpha}dt=\left|\begin{array}{l} pt=u \\ dt=\dfrac{du}{p}\end{array}\right|=\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{u^{\alpha}}{p^{\alpha}}\cdot\frac{du}{p}=$$

$$=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot u^{\alpha}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\quad \operatorname{Re} p>0,$$

де $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ – гамма-функція.

Таким чином,

$$\boxed{t^{\alpha}\ \dot{=}\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.} \bullet \tag{3.9}$$